الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
امتحان بكالوريا التعليم الثانوي
الشعبة: رياضيات

دورة: 2021

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـ: $u_0 = -\frac{3}{2}$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{11u_n + 4}{-4u_n + 1}$

1) أ . تَحقَّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{11}{4} + \frac{27}{4(-4u_n + 1)}$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$

جـ. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ . بيّن أنَّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 ثمّ احسب حدّها الأول.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2 + 4 \times 3^n} - 2$

جـ. احسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

3) أ . تَحقَّق أنَّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $\frac{3}{u_n + 2} - 2 = -v_n$

ب. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n = \ln\left(\frac{3}{u_0 + 2} - 2\right) + \ln\left(\frac{3}{u_1 + 2} - 2\right) + \cdots + \ln\left(\frac{3}{u_n + 2} - 2\right)$

احسب S_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 12 كريّة متماثلة لا نفرّق بينها باللمس.
كلّ من الكريّات الاثنتي عشرة تحمل رقما من بين الأعداد التالية: 1 ، 2 ، 3 ، 4
نسحب عشوائيا كريّة واحدة من الكيس.

نرمز بـ: p_i إلى احتمال سحب كريّة رقمها i، حيث: $p_1 = \frac{1}{3}$ ، $p_2 = \frac{1}{6}$ ، $p_3 = \frac{1}{4}$ و $p_4 = \frac{1}{4}$

1) وزّع الكريّات الاثنتي عشرة حسب الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4

2) احسب احتمال كلّ من الحوادث A ، B و C الآتية:

A " سحب كريّة تحمل رقما فرديا "
B " سحب كريّة تحمل رقما من أرقام نظام التّعداد ذي الأساس 4 "
C " سحب كريّة رقمها حلّ للمعادلة: $x^2 = 2^x$ "

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ سحب لكريّة الرّقم الذي تحمله.
عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $42x-y=38\cdots(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.
حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثّنائية $(1;4)$ حلٌ لها.

2) a ، b و c أعداد طبيعية حيث a غير معدوم.
العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{ab0cb}$ في نظام تعداد أساسه 5 و يُكتب $\overline{a7c5}$ في نظام تعداد أساسه 8

أ . بيّن أنّ الأعداد a ، b و c تُحقّق: $113a=3(c-42b+151)$ ثمّ استنتج أنّ: $a=3$

ب. جِدْ العددين الطبيعيين b و c ثمّ اكتب العدد N في النّظام العشري.

3) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 6

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $2021^{2n}+1441^n+4$ مضاعف للعدد 6

جـ. نضع: $A_n=2021^{2n}+1441^n+2\times1442^n$

جِدْ قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $A_n\equiv0[6]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x^2-3)e^x+3$

1) ادرس تغيّرات الدّالة g ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقِّق: $1{,}53<\alpha<1{,}54$

ب. احسب $g(0)$ ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+1+(x^2-2x-1)e^x$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ f متزايدة تماما على كلّ من $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. شكِّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=3x+1$ مقارب مائل لـ(C) عند $-\infty$

ب. ادرس وضعية (C) بالنّسبة إلى (Δ)

جـ. بيّن أنّ (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تُحقِّق: $2{,}03<\beta<2{,}04$

د. بيّن أنّ (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لِـ (Δ) (لا يُطلب كتابة معادلة لِـ (T) و (T'))

4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C) على $]-\infty;1+\sqrt{2}]$

(نأخذ: $\alpha\simeq1{,}53$ ، $f(\alpha)\simeq-2{,}3$ ، $f(\sqrt{3})\simeq-2{,}1$ و $f(-\sqrt{3})\simeq-3{,}2$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=f[\ln(x)]$

أ . احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة h ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بـِ: $u_0=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}u_n^2}$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $0<u_n<2$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـِ: $v_n=u_n^2-4$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_n=\sqrt{4-3\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

جـ. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

3) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=u_0^2+u_1^2+\cdots+u_n^2$

أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $S_n=\frac{n\times 2^{n+2}+3}{2^n}-2$

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n: $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=PGCD(2^n;3)$

جـ. استنتج أنّ: $PGCD(2^n;3+n\times 2^{n+2})=1$

د. جِدْ قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون: $S_n=\frac{83}{8}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يُراد عشوائيا تشكيل لجنة تضمّ رئيسا ونائبا له من بين ثلاثة رجال H_1، H_2، H_3 و أربع نساء F_1، F_2، F_3، F_4

1) بيّن أنّ عدد اللّجان التي يمكن تشكيلها هو 42

2) نعتبر الحوادث الآتية: A " اللّجنة من نفس الجنس" B " اللّجنة من جنسين مختلفين"

C " H_1 هو الرئيس" E " اللّجنة لا تضم كلاًّ من H_1 و F_1"

أ . احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثمّ استنتج $P(B)$

ب. احسب $P(C)$ و $P(E)$

3) المتغيّر العشوائي X يرفق بكلّ لجنة عدد الرّجال فيها.

عيِّن قانون احتمال X ثمّ احسب $E(X)$ أمله الرّياضياتي.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-6y=1\cdots(E)$ ، حيث x و y عددان صحيحان.

أ . حلّ المعادلة (E) علما أنّ الثّنائية $(1;1)$ حلّ لها.

ب. تَحقَّق أنّه إذا كانت الثّنائية $(x;y)$ حلاًّ للمعادلة (E) فإنّ xy عدد طبيعي غير معدوم.

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7

ب. بيّن أنّ العدد $4\times 2019^{2021}+2022^{2022}$ يقبل القسمة على 7

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي غير معدوم n : $4^n \equiv 4[6]$

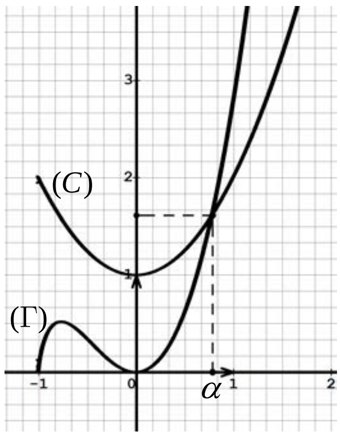
4) نفرض أنّ الثّنائية $(a\,;b)$ حلٌّ للمعادلة (E)

A عدد طبيعي يُكتب في نظام التّعداد ذي الأساس 4 على الشّكل: $\overline{333\cdots330}$ (عدد أرقامه $a\times b$)

أ . بيّن أنّ: $A=4^{ab}-4$

ب. تَحقّق أنّ: $A\equiv 0[6]$ ثمّ عيّن كلّ الثّنائيات $(a\,;b)$ التي من أجلها يكون A قابلا للقسمة على 42

التمرين الرابع: (07 نقاط)



I) المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس.

في الشّكل المقابل (C) و (Γ) هما على التّرتيب التّمثيلان البيانيان للدّالتين العدديتين المعرّفتين على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$x\mapsto 1+x^2$ و $x\mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$

(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تُحقّق: $0{,}78<\alpha<0{,}79$

الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$

1) بقراءة بيانية، حدِّد حسب قيم x من المجال $]-1\,;+\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

2) استنتج حسب قيم x من المجال $]-1\,;+\infty[$ إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة: $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ب. فسِّر النّهايتين هندسيا.

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-1\,;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكِّل جدول تغيّراتها.

جـ. بيّن أنّ: $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثمّ استنتج حصرا لِـ $f(\alpha)$

د. اكتب معادلة لِـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O

3) ارسُم (T) و (C_f) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 0{,}36$)

4) الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. بيّن أنّ الدّالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثمّ فسّر ذلك بيانيا.

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني